BULETINUL Universităţii Petrol – Gaze din Ploieşti	Vol. LX No. 2/2008	17-26	Seria Matematică - Informatică - Fizică

Contre-Continuité dans les Structures Floues Minimaux

Mihai Brescan

Universitatea Petrol-Gaze din Ploieşti, Bd. Bucureşti 39, Ploieşti

Résumé

Le but du notre travail est de généraliser pour une structure floue minimale le concept de fonction contre-continue introduit dans la Topologie générale par Takashi Noiri et Valeriu Popa. Les plus importants résultats sont les théorèmes de caractérisation et les liaisons entres les différentes formes de contre-continuité et de faible continuité.

Mots cléfs : *espace topologique flou, structure minimale floue, contre-continuité, contre Fm- continuité, F faible continuité, faible Fm- continuité , F presque continuité, presque Fm- continuité*

Introduction

Soient *X* un ensemble arbitraire non vide et l'intervalle *J*= $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Un ensemble flou en *X* est une application $\lambda: X \to [0,1]$. On va noter par $F(X)$ la classe des ensembles flous dans *X*. L'ensemble *X*, nommé l'espace *X*, sera identifié à la fonction constante **1** et l'ensemble vide Φ à la fonction constante **0**. Soient I un ensemble indexé et $\{\lambda_i\}_{i\in I}$une famille d'ensembles flous en *X*. La réunion et l'intersection de cette famille, notées par $\bigcup_{i\in I}\lambda_i$, respectivement $\bigcap_{i\in I}\lambda_i$, on les définissent dans le mode suivant :

$$(\cup_{i\in I}\lambda_i)(x) = \sup_{i\in I}\{\lambda_i(x)\}, (\forall)x \in X \; et \; (\cap_{i\in I}\lambda_i)(x) = \inf_{i\in I}\{\lambda_i(x)\}, (\forall)x \in X.$$

Évidemment, les définitions sont aussi valables pour le cas fini *I*= $\{1,2,\dots,n\}$, mai les notations sont $\bigcup_{i\in I}\lambda_i$, respectivement $\bigcap_{i\in I}\lambda_i$ et sup= max, inf= min.

L'inclusion, notée par $\lambda_1 \le \lambda_2$ ou $\lambda_2 \le \lambda_1$ on la définit par $\lambda_1(x) \le \lambda_2(x)$ et l'égalité, notée par $\lambda_1 = \lambda_2$, on la définit par $\lambda_1(x) = \lambda_2(x), (\forall)x \in X$. Évidemment $\lambda_1 = \lambda_2$ et seulement si $\lambda_1 \le \lambda_2$ et $\lambda_2 \le \lambda_1$. La complémentaire de $\lambda \in F(X)$, notée par λ^c, on la définit par $\lambda^c = 1 - \lambda,\ \lambda^c(x) = (1-\lambda)(x) = 1 - \lambda(x), (\forall)x \in X$.

Soient *X* et *Y* deux ensembles arbitraires non vides, une application $f: X \to Y \; et \; \lambda \in F(X), \mu \in F(Y)$.

L'image de λ est l'ensemble flou $f(\lambda) \in F(Y)$ donné par:

$$f(\lambda)(y)=\begin{cases}\sup\limits_{x\in \overset{-1}{f}(y)} \lambda(x), si\ \overset{-1}{f}(y)\neq 0, y\in Y, ou\ \overset{-1}{f}=\{x/f(x)=y\}\\ 0, \text{au cas contraire}\end{cases}.$$

L'image inverse ou réciproque de μ est l'ensemble flou $f^{-1}(\mu)\in F(X)$ donné par $f^{-1}(\mu)(x)=\mu(f(x)),(\forall)x\in X,$ c'est-à-dire $f^{-1}(\mu)=\mu\circ f,$ au sens de la composition ordinaire des fonctions [5]. Les propriétés de f et f^{-1} sont données dans le travail [0]. Un point flou x_α en X est un ensemble flou en X qui possède la valeur α dans le point $x\in X$ ($0<\alpha\leq 1$) et 0 dans tous les autres points de l'espace X ; on dit que x_α a le support x (noté par $supp\ x_\propto = x$) et la valeur $\propto$ [7].

On peut écrire:

$$x_\propto(y)=\begin{cases}\propto, y=x\\ 0, y\neq x\end{cases}, y\in X.$$

Un ensemble flou est la réunion de tous ses points flous.

On dit que le point flou x_α appartient à l'ensemble flou $\lambda\in F(x) si\ \alpha\leq\lambda(x),(\forall)x\in X$, et nous noterons par $x_\alpha\in\lambda$.

A lieu la relation $x_\alpha\in\bigcup\limits_{i\in I}\lambda_i$ s'il existe $i_0\in I$ tel que $x_\alpha\in\lambda_{i_0}$.

Si $x_\propto$ est un point flou en X et $f:X\to Y$, alors $f(x_\propto)$ est un point flou en Y; si $supp\ x_\propto = x$ alors $supp(f(x_\alpha))=f(x)$.

Si y_β est un point flou en Y, alors $f^{-1}(y_\beta)$ est un point flou en X; si $y_\beta\in f(x)$ et f est une injection. Dans ce cas, si supp $y_\beta=y$, alors $supp\left(f^{-1}(y_\beta)\right)=f^{-1}(y_\beta)$[10]. On dit que le point flou $x_\propto$ est quasi- coïncident (q-coïncident) à l'ensemble $\lambda\ si\ \alpha+\lambda(x)>1; x\in X$ et on va noter par $x_\propto q\lambda$; au cas contraire on va noter par $x_\alpha\ \bar{q}\ \lambda$.

Les ensembles λ, $\mu\in F(x)$ sont quasi-coïncidents (q-coïncidents) s'il y a $x\in X$ tel que $\lambda(x)+\mu(x)>1$ et on va noter par $\lambda q\mu$.

Au cas contraire on va noter par $\lambda\ \bar{q}\ \mu$. Si λ et μ sont q-coïncidents en x, alors $\lambda(x)\neq 0,\mu(x)\neq 0$ et donc $(\lambda\cap\mu)(x)\neq 0$[7]. Une topologie floue sur X (au sens Chang) est une famille $\tau\subseteq F(X)$ qui satisfait aux conditions suivantes:

(T_1) $0,1\in\tau$;

(T_2) si $\delta_i\in\tau$, $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ alors $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\delta_i\in\tau$;

(T_3) si $\delta_i\in\tau$, $i\in I$ alors $\bigcup\limits_{i\in I}\delta_i\in\tau$.

Le couple (X,τ) est par la définition un espace topologique flou (au sens Chang) ou, en abrégé e.t.f. On appelle ensemble flou τ -fermé la complémentaire d'ensemble τ -ouvert [5].

On définit l'intérieur et la fermeture de $\lambda\in F(X)$ respectivement par :

$$\mathrm{Int}\ \lambda = \overset{\circ}{\lambda} = \bigcup \ \{ \delta \mid \delta \le \lambda, \delta \in \tau \} = \sup \{ \delta \mid \delta \le \lambda, \delta \in \tau \} \text{ et}$$

$$\mathrm{Cl}\ \lambda = \bar{\lambda} = \bigcap \ \{ \sigma \mid \sigma \ge \lambda,\ \sigma^c \in \tau \} = \inf \{ \sigma \mid \sigma \ge \lambda, \sigma^c \in \tau \} \ [5].$$

L'ensemble $\lambda \in$ *F(X)* est nommé F-régulier formé (respectivement F-régulier ouvert) si $\bar{\overset{\circ}{\lambda}} = \lambda$ (respectivement $\overset{\circ}{\bar{\lambda}} = \lambda$) [2].

Un point flou x_α en *X* est nommé un point δ - adhérent (respectivement θ - adhérent) de $\lambda \in$ *F(X)* si $\overset{\circ}{\bar{\mu}} \cap \lambda \ne 0$ (resp. $\bar{\mu} \cap \lambda \ne 0$) pour quel que soit μ avec $x_\alpha \in \mu$. L'ensemble de tous le points δ - adhérents (resp. θ - adhérents) de λ on l'appelle $F\delta$ - fermeture (resp. $F\theta$ - fermeture) et l'on note par F Cl_δ (λ) (resp. F Cl_θ(λ)). L'ensemble λ est nommé *F* δ - fermé (resp. $F\theta$ - fermé) si $\lambda = F\ \mathrm{Cl}_\delta(\lambda)$ (resp. $\lambda =$ F $\mathrm{Cl}_\theta(\lambda)$).

La complémentaire d'un ensemble F δ - fermé (resp. F θ - fermé) est nommé un ensemble F δ - ouvert (resp. F θ - ouvert). La réunion de tous les ensembles F δ - ouvert (resp. F θ - ouvert) qui sont inclus dans l'ensemble λ on l'appelle F δ - intérieur (resp. F θ - intérieur) et l'on note par F $\mathrm{Int}_\delta(\lambda)$ (resp. F $\mathrm{Int}_\theta(\lambda)$).

Définition 1. Soit (X , τ) un e.t.f. et $\lambda \in$ *F(X)*.

L'ensemble λ est nommé F demi- ouvert (resp. F préouvert, F α - ouvert, F β - ouvert ou F demi- préouvert) si $\lambda \le \bar{\overset{\circ}{\lambda}}$ (resp. $\lambda \le \overset{\circ}{\bar{\lambda}}$, $\lambda \le \overset{\circ}{\bar{\overset{\circ}{\lambda}}}$, $\lambda \le \bar{\overset{\circ}{\bar{\lambda}}}$).

Définition 2. La complémentaire d'un ensemble F demi- ouvert (resp. F préouvert, F α - ouvert, F β - ouvert ou F demi- préouvert) est nommé un ensemble F demi- fermé (resp. F-préfermé, F α - fermé , F β - fermé ou F demi- préfermé).

Définition 3. L'intersection de tous les ensembles F demi- fermés (resp. F-préfermés, F α - fermés , F β - fermés) de l'espace *X* qui contient l'ensemble $\lambda \in$ *F(X)* on l'appelle la F demi-fermeture (resp. la F préfermeture, la F α - fermeture ,la F β - fermeture) et on va noter par F d- $\bar{\lambda}$ ou F d- Cl λ (resp. F p- $\bar{\lambda}$ ou F p- Cl λ , F α - $\bar{\lambda}$ ou F α - Cl λ , F β - $\bar{\lambda}$ ou F β - Cl λ).

Définition 4. La réunion de tous les ensemble F demi- ouverts (resp. F préouverts, F α - ouverts , F β - ouverts) qui sont inclus dans l'ensembles $\lambda \in$ *F(X)* on l'appelle le F demi-intérieur (resp. le F préinterieur, le F α - intérieur, le F β - intérieur) de λ et l'on note par F d- $\overset{\circ}{\lambda}$ ou F d- Int λ (resp. F p- $\overset{\circ}{\lambda}$ ou F p- Int λ , F α - $\overset{\circ}{\lambda}$ ou F α - Int λ , F β - $\overset{\circ}{\lambda}$ ou F β - Int λ) . Nous introduirons ici la suivanté.

Définition 5. Soient les espaces topologiques flous (X , τ) et (Y, t) et la function

f : (X , τ) $\to$ (Y, t). La function f est nommé F contre- continue (resp. F contre- super-continue, F contre- semi- continue, F contre- précontinue, F contre α - continue, F contre β - continue) si $f^{-1}(\mu)$ est F fermé (resp. F δ - fermé, F demi- fermé, F préfermé, F α - fermé, F β - fermé) pour quel que soit μ F t- fermé.

Structures Floues Minimaux

Les Professeurs Valeriu Popa (Université de Bacău- Roumanie) et Takashi Noiri (Yatsushiro College of Tehnology, Kumamoto- Japonie) ont developpé une très intéressante théorie unifiée aux principaux formes de continuité, basée sur le concept de m- structure (ou structure minimale).

Dans le travail [3] nous avons défini le concept de F_m- structure (ou structure floue minimale) par la définition suivante :

Définition 6. Soit *F(X)* la classe des sous- ensembles flous en *X*. Une sous - famille $F_{m_x} \subseteq F(x)$ l'on appelle une structure floue minimale (en abrégé une F_m - structure) si $0 \in F_{m_x}, 1 \in F_{m_x}$. Le couple (X,F_m) est par la définition un espace flou minimal ou F_m- espace. Si $\lambda \in F(X)$ alors λ l'on appelle F_m- ouvert si $\lambda \in F_{m_x}$, mais si $\lambda^c \in F_{m_x}$ alors λ l'on appelle F_m- fermé.

Remarque 1. Cette définition garde seulement la première condition de la définition d'une topologie floue au sens Chang. Maintenant nous remémeront quelques définitions et quelques lemmes et théorèmes de notre travail [3].

Définition 7. Soient $X \neq \Phi$, F_{m_x} une F_m- structure sur X et $\lambda \in F(X)$. On définissent la F_m- fermeture, respectivement le F_m- intérieur de λ dans le mode suivant :

1) $F_{m_x} - \bar{\lambda} = \bigcap \{ \sigma | \lambda \leq \sigma,\ \sigma^c \in F_{m_x} \} = \inf \{ \sigma |\ \lambda \leq \sigma,\ \sigma^c \in F_{m_x} \}$;

2) $F_{m_x} - \mathring{\lambda} = \bigcup \{ \delta |\ \delta \leq \lambda, \delta \in F_{m_x} \} = \sup \{ \delta |\ \delta \leq \lambda,\ \delta \in F_{m_x} \}$.

On peut noter par F_{m_x} - Cl λ , respectivement F_{m_x} - Int λ .

Lemme 1. Soient $X \neq \Phi, F_{m_x}$ une F_m- structure sur X et $\lambda, \mu \in F(X)$. Alors sont vraiments les affirmations suivantes :

1) $F_{m_x} - \bar{\lambda}^c = (F_{m_x} - \mathring{\lambda})^c, F_{m_x} - \mathring{\lambda}^c = (F_{m_x} - \bar{\lambda})^c$;

2) si $\lambda^c \in F_{m_x}$ alors $F_{m_x} - \bar{\lambda} = \lambda$ et

   si $\lambda \in F_{m_x}$ alors $F_{m_x} - \mathring{\lambda} = \lambda$;

3) $F_{m_x} - \bar{0} = 0, F_{m_x} - \bar{1} = 1, F_{m_x} - \mathring{1} = 1$;

4) si $\lambda \leq \mu$ alors $F_{m_x} - \bar{\lambda} \leq F_{m_x} - \bar{\mu}, F_{m_x} - \mathring{\lambda} \leq F_{m_x} - \mathring{\mu}$;

5) $\lambda \leq F_{m_x} - \bar{\lambda}, F_{m_x} - \mathring{\lambda} \leq \lambda$;

6) $F_{m_x} - \overline{(F_{m_x} - \bar{\lambda})} = F_{m_x} - \mathrm{Int}\, (F_{m_x} - \mathring{\lambda})$.

Lemme 2. Soient (X, F_{m_x}) un F_m- espace, $\lambda \in F(X)$ et x_α un point flou en X . Alors $x_\alpha \in F_{m_x}$ - $\bar{\lambda}$ si et seulement si $\mu\ q\ \lambda$ pour quel que soit $\mu \in F_{m_x}$ avec $x_\alpha \in \mu$.

Définition 8. On dit que la F_{m_x} a la propriété (B) si $(\delta_i)_{i \in I} \subseteq F_{m_x}$ implique $\bigcup_{i \in I} \delta_i \in F_{m_x}$.

Remarque 2 . Cette définition corresponde au condition (T3) de définition d'une topologie floue (au sens Chang).

Définition 9. Une structure floue minimale avec la propriété (B) on l'appelle encore une supratopologie floue sur X et dans ce cas le couple (X, F_{m_x}) est par la définition un espace flou supratopologique. Les éléments de F_{m_x} sont nommés ici ensembles flous supraouverts et leurs complémentaires sont nommes ensembles flous suprafermés [6].

Théorème 1. Pour une structure minimale F_{m_x} sur $X \neq \Phi$, les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) F_{m_x} a la propriété (B) ;
2) si $F_{m_x} - \overset{\circ}{\lambda} = \lambda$ alors $\lambda \in F_{m_x}$;
3) si $F_{m_x} - \bar{\mu} = \mu$ alors $\mu^c \in F_{m_x}$.

Lemme 3. Soient $X \neq \Phi$, F_{m_x} une supertopologie floue sur X et $\mu \in F(X)$. Alors:

1) $\lambda \in F_{m_x}$ si et seulement si $F_{m_x} - \overset{\circ}{\lambda} = \lambda$;
2) λ est F_{m_x} - fermé si seulement si $F_{m_x} - \bar{\lambda} = \lambda$;
3) $F_{m_x} - \overset{\circ}{\lambda} \in F_{m_x}$ et $F_{m_x} - \bar{\lambda}$ est F_{m_x} - fermé .

Définition 10. Soient $X \neq \Phi$ avec la structure minimale F_{m_x} et (Y, t) un e.t.f. La fonction f : $(X, F_{m_x}) \to (Y, t)$ on appelle F_m- continue (floue) si pour tout point flou x_α en X et pour tout ensemble ν t- ouvert avec $f(x_\alpha)\, q\ \nu$ il existe $\delta \in F_{m_x}$ avec $x_\alpha\ q\ \delta$ tel que $f(\delta) \leq \nu$.

La théorème suivant représente un théorème de caractérisation pour les fonctions F_m- continues (floues) .

Théorème 2. Soient $X \neq \Phi$ avec la structure minimale F_{m_x}, (Y,t) un e.t.f. et la fonction f :$(X, F_{m_x}) \to (Y, t)$. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) f est F_m- continue (floue);
2) $f^{-1}(\nu) = F_{m_x}$ - Int $f^{-1}(\nu)$, $(\forall)\nu \in$ t ;
3) $F_{m_x} - \overline{f^{-1}(\sigma)} = f^{-1}(\sigma)$, $(\forall)\sigma \in$ F(Y) où $\sigma^c \in$ t ;
4) $F_{m_x} - \overline{f^{-1}(\mu)} \leq f^{-1}(\bar{\mu})$, $(\forall)\mu \in$ F(Y) ;
5) $f(F_{m_x} - \bar{\lambda}) \leq \overline{f(\lambda)}$, $(\forall)\ \lambda \in F(X)$;

6) $f^{-1}(\overset{\circ}{\mu}) \leq F_{m_x}$ - Int $f^{-1}(\mu)$, $(\forall)\, \mu \in$ F(Y).

Les démonstrations de lemmes et de théorèmes ennoncés sont données en [3].

Contre- Continuite dans une Structure Floue Minimale

Comme une généralisation de la Def. 3 .5 et 3.6. [8] nous introduirons ici les définitions suivantes:

Définition 11. Soient l'espace $X \neq \Phi$ avec la structure floue minimale F_{m_x}, un e.t.f (Y,t) et la fonction $f:(X, F_{m_x}) \to (Y,t)$.

La fonction f on appelle contre F$_m$- continue si $f^{-1}(\nu) = F_{m_x}$ - $\overline{f^{-1}(\nu)}$ pour tout ensemble ν t-ouvert.

On dit aussi que la fonction f est contre F_m- continue dans le point flou x_α en X si pour tout ensemble μ t- fermé avec $f(x_\alpha)\ q\ \mu$, il existe $\delta \in F_{m_x}$ avec $x_\alpha\ q\ \delta$ tel que $f(\delta) \leq \mu$.

Définition 12. Soient (X, τ) un espace topologique flou et $\lambda \in F(X)$. L'ensemble noté par Ker(λ), donné par Ker(λ)= $\cap$ { $\delta \in \tau \mid \delta \leq \lambda$ } est nommé un Λ- ensemble ou le noyau de λ (Ker= Kernel (anglais)).

Lemme 4. Soient $\lambda, \mu \in F(X)$ où (X, τ) est un e.t.f. Alors :

1) $x_\alpha \in$ Ker(λ) si et seulement si $\lambda\ q\ \sigma$ pour tout ensemble τ - fermé avec $x_\alpha \in \sigma$;
1) si $\lambda \in \tau$, alors $\lambda =$ Ker(λ) ;
2) si $\lambda \leq \mu$, alors Ker(λ)$\leq$ Ker(μ).

La démonstration est facile. Nous donnerons ici la suivant théorème de caractérisation :

Théorème 3. Soient l'espace flou minimal (X, F_{m_x}), l'espace topologique flou (Y, t) et la fonction $f:(X, F_{m_x}) \to (Y, t)$.

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) f est contre F_m- continue;
2) $f^{-1}(\sigma) = F_{m_x}$ - ($f^{-1}(\sigma)$) pour tout ensemble σ t- fermé;
3) pour tout point flou x_α en X, f est contre F$_m$- continue dans le point x_α ;
4) $f(F_{m_x} - \overline{\lambda}) \leq$ Ker($f(\lambda)$), $(\forall)\, \lambda \in F(X)$;
5) F_{m_x} - $\overline{f^{-1}(\mu)} \leq f^{-1}$(Ker(μ)), $(\forall)\, \mu \in$ F(Y).

Démonstration.

(1)=> (2). Soit σ un ensemble t- fermé, donc σ^c est t- ouvert. Parce que f est contre F_m-continue, alors $f^{-1}(\sigma^c)= F_{m_x}- \overline{f^{-1}(\sigma^c)}$ et après le Lemme 1, nous avons $(f^{-1}(\sigma))^c= (F_{m_x}$- Int$(f^{-1}(\sigma))^c$ et donc $f^{-1}(\sigma)= F_{m_x}$- Int$(f^{-1}(\sigma))$.

(2)=> (3). Soient x_α un point flou en X et σ un ensemble t- fermé avec $f(x_\alpha)\ q\ \sigma$. Il en résulte que $x_\alpha\ q\ f^{-1}(\sigma)$ et après (2) $x_\alpha\in F_{m_x}$- Int $f^{-1}(\sigma)$. Alors il existe $\delta\in F_{m_x}$ avec $x_\alpha\ q\ \delta$ tel que $x_\alpha\ q\ \delta\le f^{-1}(\sigma)$. Donc $x_\alpha\in\delta$ et $f(\delta)\le\sigma$, ce qui montre que f est contre F_m-contrinue dans le point x_α.

(3)=> (4). Soient $\lambda\in F(X)$, $x_\alpha\in F_{m_x}-\overline{\lambda}$ et σ un ensemble t- fermé avec $f(x_\alpha)\ q\ \sigma$. Alors, après (3) il existe $\delta\in F_{m_x}$ avec $x_\alpha\ q\ \delta$ tel que $f(\delta)\le\delta$. D'ici, $x_\alpha\in\delta\le f^{-1}(\sigma)$. Parce que $x_\alpha\in F_{m_x}-\overline{\lambda}$, après le Lemme 2 $\delta\ q\ \lambda$, donc $0\neq\delta\cap\lambda$ et donc $0\neq f(\delta\cap\lambda)\le f(\delta)\cap f(\lambda)\le\sigma\cap f(\lambda)$ et après le Lemme 4 (1) on a bien $f(x_\alpha)\in$ Ker$(f(\lambda))$ et donc $f(F_{mx}-\overline{\lambda})\le$ Ker$(f(\lambda))$.

(4)=> (5). Soit $\mu\in$ F(Y). Alors, après (4) et le Lemme 4, on a bien $f(F_{m_x}-\overline{f^{-1}(\mu)}\le$ Ker$(f(f^{-1}(\mu)))\le$ Ker(μ) et donc $F_{m_x}-\overline{f^{-1}(\mu)}\le f^{-1}(Ker(\mu))$.

(5)=> (1). Soit ν un ensemble t- ouvert ; alors, après (5) et le Lemme 4 (2) on a bien $F_{m_x}-\overline{f^{-1}(\nu)}\le f^{-1}(Ker(\nu))= f^{-1}(\nu)$.

Puis, après le Lemme 1, $F_{m_x}-\overline{f^{-1}(\nu)}=f^{-1}(\nu)$, ce qui montre que f est contre F_m- continue.

Corollaire 1. Soient (X,F_{m_x}) un espace flou supratopologique, (Y, t) un espace flou topologique et la fonction $f: (X, F_{m_x})\rightarrow$ (Y, t). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) f est contre F_m-continue;
2) $f^{-1}(\sigma)\in F_{m_x}$, pour tout ensemble σ t- fermé;
3) $f^{-1}(\mu)$ est F_{m_x}- fermé en (X, F_{m_x}), $(\forall)\ \mu\in$ t.

Remarque 3. Soient (X, τ) et (Y, t) deux espaces topologiques flous. Si $F_{m_x}=\tau$ (resp. les ensembles de tous ensembles F demi- ouverts, F preouverts, $F\alpha$- ouverts, $F\beta$- ouverts) en X, alors une fonction $f: (X, F_{m_x})\rightarrow$ (Y, t), F_m- contre continue est F contre- continue (resp.F contre- demi- coninue, F contre- précontinue, F contre α- continue, F contre β- contre).

Remarque 4. Le Corollaire 1 représent aussi un théorème de caractérisation pour une fonction contre F_m- continue. Autres notions importantes sont données par suivante.

Définition 13. Soient les espaces topologiques flous (X, τ) et (Y,t) et la fonction f : (X, Fm_x)→ (Y, t). La fontion f est nommée F faiblement continue (resp. F faiblement quasicontinue ou F faiblement demi- continue; presque faiblement continue ou F quasiprécontinue; F faiblement α - continue; F faiblement β - continue) si pour tout point flou x_α en X et pour tout ensemble ν t- ouvert avec $f(x_\alpha)$ q ν il existe un ensemble $\delta \in F(X)$ τ - ouvert (resp. F demi- ouvert , F préouvert, F α - ouvert, F β - ouvert) avec x_α q δ tel que $f(\delta) \leq \bar{\nu}$.

Remarque 5. Dans la topologic classique les notions correspondantes ont été étudiées respectivement par les suivants mathématiciens: N. Levine (1961); V. Popa et C. Stan (1973); S. P. Arya et M. P. Bhamini (1982); Gh. Costovici (1980); A. Kar et Bhattacharyya (1986); D. S. Janković (1985); R. Paul et P. Bhattacharyya (1995); T. Noiri (1987); V. Popa et T. Noiri (1994).

Remarque 6. Si dans la Définition 13 on remplace l'espace (X, τ) par l'espace minimal (X, Fm_x) on obtient les notions correspondantes pour une structure floue minimale.

Théorème 4. Soient l'espace flou minimal (X, Fm_x) et l'espace topologique flou (Y, t). Si la fonction f : (X, Fm_x) → (Y, t) est contre F_m- continue, alors f est faiblement F_m- continue.

Démonstration. Soient un point flou x_α en X et l'ensemble $\nu \in$ t avec $f(x_\alpha)$ q ν . Èvidemment $\bar{\nu}$ est t- fermé et $f(x_\alpha)$ q $\bar{\nu}$. Comme f est contre F_m- continue, il existe $\delta \in Fm_x$ avec x_α q δ tel que $f(\delta) \leq \bar{\nu}$, donc f est faiblement F_m- continue.

Corollaire 2. Si la fonction f : (X, Fm_x) → (Y, t) est F_m contre- continue (resp.F contre- demi-continue, F contre- précontinue, F contre α - continue, F contre β - continue) alors f est F faiblement continue (resp. F faiblement demi- continue, F presque faiblement continue, F faiblement α - continue, F faiblement β - continue).

Définition 14. Soient les espaces topologiques flous (X, τ) et (Y, t). La fonction f : (X, τ) → (Y, t) est nommée F presque continue [1] (resp. F presque quasicontinue ou F presque demi-continue; F presque précontinue; F présque α - continue; F présque β - continue) si pour tout point flou x_α en X et pour tout ensemble ν t- ouvert avec f (x_α) q ν il existe un ensemble $\delta \in F(X)$ τ -ouvert (resp. F demi- ouvert, F préouvert, F α - ouvert, F β - ouvert) avec x_α q δ tel que $f(\delta) \leq \mathring{\bar{\nu}}$.

Remarque 7. Dans la topologic classique les notions correspondantes ont été étudiées respectivement par les mathématiciens suivants : M. K. Singal et A. R. Singal (1986) (resp. V. Popa (1978) ou R. S. Malghan et K. S. Ramani Iyengar(1978), B. M. Munshi et D. S. Bassan (1981), T.Noiri et B. Ahmad (1985), T. Noiri et A. A. Nasef (1997), V. Popa et T. Noiri et M. Ganster (1997), S. S. Tharkur et P. Paik (1987), A. A. Nasef et T. Noiri (1997)).

Remarque 8. Si dans la Définition 14 on remplace l'espace (X, τ) par l'espace minimal (X, Fm_x) on obtient les notions correspondantes pour une structure floue minimale.

Définition 15. La fonction f : (X, τ)→ (Y, t) est nommée F presque ouverte (resp. F presque préouverte, F presque régulier ouverte ou FM- préouverte, F α -préouverte, F présque β -

ouverte) si pour tout ensamble $\delta \in F(X)$ τ - ouvert (resp. F demi- ouvert, F préouvert, F α- ouvert, F β - ouvert), $f(\delta) \leq \overset{\circ}{\bar{\delta}}$.

Remarque 9. Dans la topologic classique les notions correspondantes on été étudiées respectivement par les mathématiciens suivantes : D. A. Rose (1984) (resp. V. Popa (1990); M. E. Abd El- Monsef, R. A. Mahmoud et R. Lashin (1983) ou A. S. Mashhour et T. Noiri (1984); V. Popa et T. Noiri (2002); T. Noiri et V. Popa (1998)).

Remarque 10. Si dans la Définition 15 on remplace l'espace (X, τ) par l'espace minimal (X, F_{m_x}) on obtient les notions correspondantes pour une structure floue minimale.

Ici nous considérerons seulement la définition suivante:

Définition 16. La fonction f : (X, F_{m_x})→ (Y, t) est nommée presque F_m- ouverte si $f(\delta) \leq \overset{\circ}{\bar{\delta}}$, $(\forall)\,\delta \in F_{m_x}$.

Théorème 5. Soit f : (X, F_{m_x})→ (Y, t) une fonction presque F_m- ouverte et contre F_m- continue. Alors f est presque F_m- continue.

Démonstration: Soient x_α un point flou en X et l'ensemble ν t- ouvert avec $f(x_\alpha)$ q ν. Èvidemment $\bar{\nu}$ est t- fermé avec $f(x_\alpha)$ q $\bar{\nu}$. Parce que f est contre F_m- continue, il existe $\delta \in F_{m_x}$ avec x_α q δ tel que $f(\delta) \leq \bar{\nu}$ (voir Déf. 11).

Parce que f est presque F_m- ouverte, $f(\delta) \leq \overset{\circ}{\overline{f(\delta)}} \leq \overset{\circ}{\bar{\nu}}$ et donc f est presque F_m- continue.

Corollaire 3. Si la fonction f : (X, τ)→ (Y, t) est *F* contre- continue (resp.*F* contre- demi- continue, *F* contre- précontinue, *F* contre α- continue, *F* contre β- continue) et *F* presque- ouverte (resp. *F* presque préouverte, *FM*- préouverte, *F* α-préouverte, *F* presque β- ouverte) alors f est *F* presque continue (resp. *F* resque demi- continue, F presque précontinue, *F* presque α- continue, *F* presque β- continue).

Définition 17. L'espace topologique flou (Y, t) est nommé *F* presque- régulier si pour tout ensemble *F* régulier fermé $\mu \in F$(Y) est pour tout point flou y_β en Y avec y_β $\bar{q}$ μ il y a les ensembles disjoints et ouverts λ et μ tel que y_β q λ et $\mu \leq \nu$.

Théorème 6. Si la fonction f : (X,F_{mx}) → (Y, t) est contre F_m- continue et (Y, t) est *F* presque- régulier, alors f est presque F_m- continue.

Démonstration: Soient x_α un point flou x_α en X et l'ensemble $\nu \in$ t avec $f(x_\alpha)$ q ν. Parce que (Y, t) est *F* presque- régulier, il existe un ensemble *F* régulier ouvert ρ en Y tel que $f(x_\alpha)$ q $\overset{\circ}{\rho} \leq \rho \leq \overset{\circ}{\bar{\nu}}$. Comme f est conte F_m- continue et $\bar{\rho}$ est t- fermé, alors il existe $\lambda \in F_{m_x}$ avec x_α q λ tel que $f(\lambda) \leq \bar{\rho} \leq \overset{\circ}{\bar{\nu}}$ et donc f est presque F_m- continue.

Bibliographie

1. A k d a g, M. - Almost Forms of Some Fuzzy Continuities, *Transaction of Academy of Sciences of Azerbadjan, Series of Physical and Mathematical Sciences*, No. 2,3, pp. 70- 76, 2000
2. A z a d, K.K. - On Fuzzy Semicontinuity, Fuzzy Almost Continuity and Fuzyy Weakley Continuity, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 82, pp. 14- 32, 1981
3. B r e s c a n, M. - Structures Floues Minimaux, Buletinul Universității Petrol-Gaze din Ploieşti, vol. LIII, Seria Matematică- Informatică, Nr.1, 2001
4. B r e s c a n, M. - Floue Faible Continuité dans une Structure Floue Minimale, *Studii si Cercetări Ştiințifice*, Seria Matematică, Universitatea Bacău, Nr.17, 2007
5. C h a n g, C.L. - Fuzyy Topological Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 43, pp. 734- 742, 1973
6. M i n, W.K., P a r k, C.K. - On Fuzzy M-Sets and Fuzzy M-Continuity, *International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, vol. 5, No. 1, pp. 59-63, March 2005
7. M i n g, P.P., M i n g, L.Y. - Fuzyy Topology I. Neigborhood Structure of a Fuzzy Point, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 77, pp. 20-37, 1980
8. N o i r i, T., P o p a, V. - An Unified Theory of Contra- Continuity for Functions, *Annales Univ. Sci.*, Budapest, 44, pp. 115- 137, 2002
9. P o p a, V., N o i r i, T. - On M-Continuous Function, *Analele Universității "Dunărea de Jos"*, Galați, Fasc.II, anul XVIII, pp. 31- 41, 2000
10. T u n a, H., Y a l v a ç, S - Fuzzy Sets and Functions of Fuzzy Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 126, pp. 409- 423, 1987

Contra-continuitate în structuri fuzzy minimale

Rezumat

Scopul lucrării noastre este de a generaliza pentru o structură fuzzy minimală conceptul de funcție contra-continuă introdus şi studiat în Topologia generală de Takashi Noiri şi Valeriu Popa. Cele mai importante rezultate ale prezentei lucrări sunt teoremele de caracterizare şi legăturile stabilite între diferitele forme de contra-continuitate şi de slabă continuitate.